14. Januar 2000

Lehrveranstaltung Sommersemester 2000:

Hauptseminar:	Logik kollektiver Entscheidungen (auch im Rahmen des Graduiertenkollegs „Politik-Recht-Philosophie")
Zeit:	Dienstags, 15^{00}-17^{00}
Kurzbeschreibung:	Weiterhin bestehen Zweifel daran, welche Rolle und Bedeutung der Logik kollektiver Entscheidungen (*social choice theory*) in der Politikwissenschaft zukommt. Im Rahmen einer Diskussion der zentralen Theoreme der Logik kollektiver Entscheidungen soll im Seminar eine Antwort auf die Frage gesucht werden.
Literatur:	Lucian Kern und Julian Nida-Rümelin, *Logik kollektiver Entscheidungen*, München-Wien: R. Oldenbourg 1994 John Craven, *Social Choice*, Cambridge, England: Cambridge University Press 1992 Jerry S. Kelly, *Social Choice Theory. An Introduction*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1988
Sprechstunde:	Dienstags, 14^{00}-15^{00} Raum 52

PD Dr. Lucian Kern

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000

Hauptseminar

Logik kollektiver Entscheidungen (LkE)

Literatur

Kenneth J. Arrow*, Social Choice and Individual Values*, New York-London 1966

Walter Bossert und Frank Stehling, *Theorie kollektiver Entscheidungen*, Berlin-Heidelberg-New York 1990

Robin Farquharson, *Theory of Voting*, New Haven 1969

Jerry S. Kelly, *Social Choice Theory*, Berlin-Heidelberg-New York 1988

Lucian Kern und Julian Nida-Rümelin*, Logik kollektiver Entscheidungen*, München-Wien 1994 (im folgd. zit. als: K. & N.-R.)

William H. Riker, *Liberalism against Populism*, San Francisco 1982

John E. Roemer, *Theories of Distributive Justice*, Cambridge-London 1996

Donald G. Saari, *Basic Geometry of Voting*, Berlin-Heidelberg-New York 1995

Johannes Schmidt, *Gerechtigkeit, Wohlfahrt und Rationalität*, Freiburg-München 1991

Amartya K. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, Edinburgh-San Francisco 1970

Themenfolge

		Abschnitte in K. & N.-R.	Datum
1.	Grundlagen der Entscheidungslogik	1.1 – 1.4	2. 5.
2.	Abstimmungsparadox und Allgemeine Instabilität	3.1 – 3.2 7.1 – 7.3	9. 5.
3.	Das Theorem von Arrow (AT)	3.3 – 3.5	16. 5.
4.	Einstimmigkeit, Stimmentausch und das Veto-Theorem (VT)	4.1 – 4.4	23. 5.
5.	Das Resultat von Gibbard und Satterthwaite (RGS)	5.1 – 5.5	30. 5.
6.	Beschränkungen individueller Präferenzen	6.1 – 6.3	6. 6.
7.	Erweiterte Präferenzen und interpersonelle Vergleichbarkeit	8.3 – 8.4	20. 6.
8.	Utilitaristisches Prinzip	9.2 – 9.3	27. 6.
9.	Maximin- und Leximin-Prinzip	9.1 + 9.3	4. 7.
10.	Fairness-Prinzipien	9.4	11. 7.
11.	Das Gefangenen-Dilemma	10.1 – 10.4	18. 7.
12.	Das Liberale Paradox	11.1 – 11.2	25. 7.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000

Materialien zum Seminar Logik kollektiver Entscheidungen

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar:
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
2. Mai 2000

Grundlagen der Entscheidungslogik

In der **Logik kollektiver Entscheidungen** geht es darum, wie sich individuelle Präferenzen zu einer kollektiven oder gemeinsamen Präferenz aggregieren lassen. Präferenzen werden dabei als einfache Verknüpfungen von Alternativen durch die Individuen oder ein Kollektiv betrachtet, die Bevorzugung oder Indifferenz ausdrücken.

Menge der Alternativen: $X = \{x, y, z, \ldots\}$
Menge der Individuen (Kollektiv): $K = \{i, j, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots n$

Verknüpft werden die Alternativen durch eine Relation R, die **schwache Präferenz** bedeutet, d.h. xRy heißt: Alternative x wird gegenüber Alternative y (strikt) vorgezogen oder zwischen x und y besteht Indifferenz.

Aus R läßt sich wie folgt die Relation der strikten Präferenz P und der Indifferenz I ableiten:

$xPy \iff xRy \wedge \neg yRx$
$xIy \iff xRy \wedge yRx$

Für individuelle Relationen wird dem R ein Subskript hinzugefügt: R_i

$xP_iy \iff xR_iy \wedge \neg yR_ix$
$xI_iy \iff xR_iy \wedge yR_ix$

Aussagenlogik

In der Aussagenlogik geht es um die (logische) Verknüpfung von Aussagen, die verkürzt als A, B, C … etc. bezeichnet werden.

$\neg A$	=	nicht A	(Negation)
$A \wedge B$	=	A und B	(Konjunktion)
$A \vee B$	=	A oder B	(Einschließendes ‘oder’)
$A \dot{\vee} B$	=	entweder A oder B	(Ausschließendes ‘oder’)
$A \Rightarrow B$	=	aus A folgt B	(Implikation)
$A \Leftrightarrow B$	=	A genau dann, wenn B	(Äquivalenz)

Quantorenlogik

$\forall x$: [Px $\Rightarrow$ Qx]	=	Für alle x gilt: Wenn P, dann Q	(Allquantor)
$\exists x$: [Px $\vee$ Qx]	=	Es gibt ein x, für das P oder Q gilt	(Existenzquantor)

Die eckigen Klammern bezeichnen jeweils die Reichtweite des Quantors.

Mengentheorie

$\in$	Element einer Menge	z.B.: $a \in \{a, b\}$
$\subset$	Teilmenge	z.B.: $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
$\cap$	Schnittmenge	z.B.: $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
$\cup$	Vereinigungsmenge	z.B.: $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
Pot	Potenzmenge	z.B.: Pot(M) = Menge aller Teilmengen
$\times$	Produktmenge	z.B.: $X \times Y$ = Menge aller geordneten Paare $\langle x, y\rangle$

Relationen

$\langle a, b\rangle$	Das geordnete Paar a, b (a an erster Stelle, b an zweiter)
$\langle a, b\rangle$	$= \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Solche geordneten Paare, Tripel oder n-Tupel geben innerhalb einer Menge eine Reihenfolge an, so daß $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$, jedoch $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Eine **Relation R** ist eine Teilmenge der Produktmenge von X und Y, wobei $x \in X$ und $y \in Y$ ist, so daß $R \subset X \times Y$, d.h. es gibt in der Menge X eine Folge von Alternativen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sowie in der Menge Y eine Folge von Alternativen $y_1, y_2, \ldots,$ y_n, , die sich jeweils paarweise zuordnen lassen: $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$, usw. und die in einer spezifischen Relation zueinander stehen.

Dabei ist $\langle x, y\rangle \in R$ zu lesen als: 'x wird gegenüber y vorgezogen oder x wird gegenüber y für indifferent gehalten'. Aus dieser Relation der **schwachen Präferenz** läßt sich die Relation der **strikten Präferenz** P und die Relation der **Indifferenz** I wie folgt ableiten:

$\langle x, y\rangle \in P{:} \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in R \wedge \neg \langle y, x\rangle \in R]$
$\langle x, y\rangle \in I{:} \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R]$.

Eigenschaften von Präferenzrelationen

Eine Präferenzrelation R ist **vollständig**: $\Leftrightarrow \forall x, y \in X{:}\ [\langle x, y\rangle \in P \vee \langle y, x\rangle \in P \vee \langle x, y\rangle \in I]$ bzw. äquivalent: $[\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R]$.

Eine Präferenzrelation R ist **transitiv**: $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X{:}\ [\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R]$.

Präferenzrelationen, die vollständig und transitiv sind, sind zugleich **reflexiv**, d.h. sie lassen sich zu sich selbst in Beziehung setzen.

Angenommen x = y, dann gilt aufgrund der Vollständigkeit:
$\forall x \in X: [\langle x, x\rangle \in R \vee \langle x, x\rangle \in R] \Rightarrow \forall x \in X: [\langle x, x\rangle \in R]$.

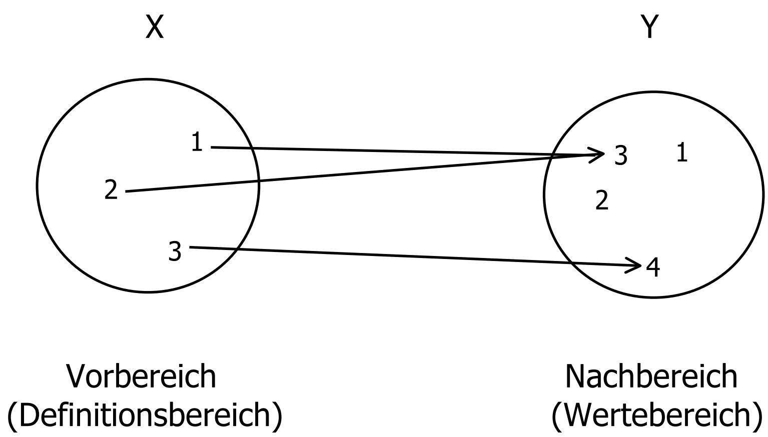
Präferenzrelationen, die vollständig und transitiv und damit reflexiv sind, werden als Präferenzordnungen oder kurz: **Ordnungen** bezeichnet.

Funktionen

Eine **Funktion** (Abbildung, Zuordnung) ist eine spezifische Art von Relation.

Definition 1: Eine Funktion ist eine **nacheindeutige** Relation, d.h.
$f: X \ni x \mapsto y \in Y$ (oder: $f(x) = y$).

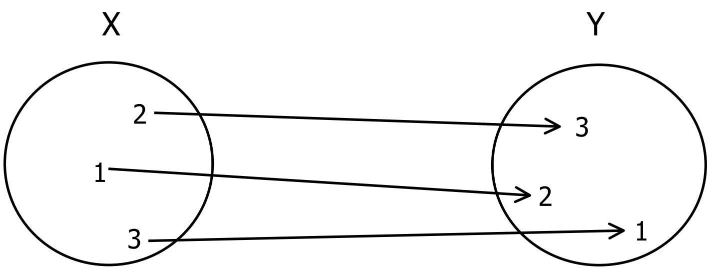
Nacheindeutig heißt, daß in der Relation keine zwei Paare vorkommen dürfen, in denen an der vorderen Stelle das gleiche Element, an der hinteren Stelle aber unterschiedliche Elemente stehen.



Funktion $\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$

Definition 2: Eine Bijektion ist eine **eineindeutige**, d.h. eine nacheindeutige und **voreindeutige** Relation.

Voreindeutig heißt, daß in der Relation keine zwei Paare vorkommen dürfen, in denen an der hinteren Stelle das gleiche Element, an der vorderen Stelle aber unterschiedliche Elemente stehen.



Funktion $\{\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$ (Bijektion)

Präferenzstruktur und Aggregationsregel

Ist die Präferenzrelation R die schwache Präferenz einer Person, so wird dies durch ein Subskript i = 1, 2, … n gekennzeichnet, so daß z.B.: $\langle x, y\rangle \in R_i$.

Die Gesamtheit der individuellen Präferenzrelationen einer Gruppe von Personen oder eines Kollektivs K kann nun durch eine Funktion g erfaßt werden, die jede4m Individuum i aus K seine individuelle Präferenzrelation R_i zuordnet.

Definition 3: Eine **Präferenzstruktur** ist eine Funktion g, so daß
$g: K \ni i \mapsto R_i \in \text{Pot}(X \times X)$; $R_i = g(i)$ und $P_i = \dot{g}(i)$.

Strikte Präferenz: $\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) :\Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in g(i) \wedge \langle y, x\rangle \notin g(i)]$

Indifferenz: $\langle x, y\rangle \in \tilde{g}(i) :\Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in g(i) \wedge \langle y, x\rangle \in g(i)]$

Reflexivität: $\forall i \in K: \forall x \in X: [\langle x, x\rangle \in g(i)]$

Vollständigkeit: $\forall i \in K: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in g(i) \vee \langle y, x\rangle \in g(i)]$

Transitivität: $\forall i \in K: \forall x, y, z \in X: [\langle x, y\rangle \in g(i) \wedge \langle y, z\rangle \in g(i) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in g(i)]$

Die Präferenzstruktur g wird durch eine – zunächst nicht näher spezifizierte – **Aggregationsregel** (AR) f in eine kollektive Präferenz übergeführt.

Definition 4: Sei G die Menge aller logisch möglichen Präferenzstrukturen g, so ist eine AR eine Funktion f, die jeder Präferenzstruktur eine kollektive Präferenz f(g) zuordnet, so daß

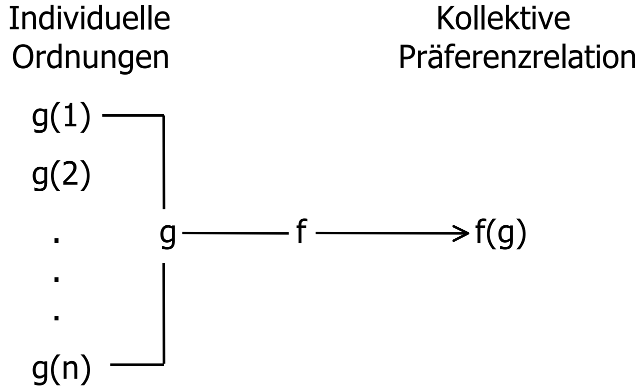
$f: G \ni g \mapsto R \in \mathrm{Pot}(X \times X)$; $R = f(g)$ und $P = \dot{f}(g)$.

Strikte Präferenz: $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) :\Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in f(g) \wedge \langle y, x\rangle \notin f(g)]$

Indifferenz: $\langle x, y\rangle \in \tilde{f}(g) :\Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in f(g) \wedge \langle y, x\rangle \in f(g)]$

Ist die kollektive Präferenz, die g mittels f zugeordnet erhält, ihrerseits eine Ordnung, so wird f eine **Kollektive Wohlfahrtsfunktion** (KWF) genannt.

Definition 5: Eine AR f ist eine KWF: $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [f(g) ist reflexiv, vollständig und transitiv].



PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar:
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
16. Mai 2000

Arrows Theorem und Beweis

Arrows Bedingungen

Zwei Bedingungen, die unsere Definition einer KWF bereits beinhaltet:

Bedingung **O** (**Ordnung**):
Die kollektiven Präferenzen müssen Ordnungen sein, also vollständige und transitive Präferenzrelationen.

Bedingung **U** (**Unbeschränkter Definitionsbereich**):
Der Definitionsbereich der KWF ist nicht beschränkt.

Die weiteren Bedingungen sind:

Bedingung **D** (**Ausschluß der Diktatur**):
$\neg\exists i \in K: \forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$

Bedingung **P** (**Pareto-Prinzip**):
$\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$

Bedingung **I** (**Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**):
$$\forall g, g' \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: [\langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)]$$
$$\Rightarrow [\langle x, y\rangle \in f(g) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f(g')]]$$

Arrows Theorem:

Es gibt keine KWF, die den Bedingungen **P**, **I** und **D** genügt.

Beweisgang:

Eine KWF, die **P** und **I** gehorcht, erfüllt nicht **D**, d.h. dann gibt es einen **Diktator**.

Definitionen:

Eine Person $i \in K$ mit der Eigenschaft, daß $\forall g \in G$: $\forall x, y \in X$:
$[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$, ist ein **Diktator**.

Eine Person $i \in K$ ist **entscheidend** bezüglich $x, y \in X$, d.h.
$\langle x, y\rangle \in \mathbf{e}(i)$: $\Leftrightarrow \forall g \in G$: $[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Eine Person $i \in K$ ist **fast entscheidend** bezüglich $x, y \in X$, d.h.
$\langle x, y\rangle \in \mathbf{fe}(i)$: $\Leftrightarrow \forall g \in G$:$[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \wedge \forall j \in K\backslash\{i\}$: $\langle y, x\rangle \in \dot{g}(j) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$.

Es gilt stets: $\langle x, y\rangle \in \mathbf{e}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbf{fe}(i)$, aber nicht umgekehrt.

Eine Teilgruppe L ist **fast entscheidend**: $\Leftrightarrow L \subseteq K \wedge \forall g \in G$: $\forall x, y \in X$:
$[\forall i \in L$: $\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \wedge \forall i \in K\backslash L$: $\langle y, x\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Eine Teilgruppe L ist **minimal fast entscheidend**: $\Leftrightarrow$ L ist fast entscheidend und hat keine echte Teilmenge, die fast entscheidend ist.

Beweis:

Für irgendein Paar von Alternativen gibt es mindestens eine Menge von Individuen, die entscheidend ist: Wegen Bedingung **P** die Menge K **aller** Individuen, die auch fast entscheidend ist, da **entscheidend fast entscheidend** impliziert..

Es kann aber auch eine Teilmenge $L \subset K$ fast entscheidend sein (Bsp.: Mehr-heits-regel). Was ist die kleinste fast entscheidende Teilgruppe?

Annahme: L ist **minimal fast entscheidend** bezüglich x, y aus X.

$$\overbrace{\overbrace{L_1 \quad L_2}^{L} \quad L_3}^{K}$$

L_1	L_2	L_3	
			Wegen der Annahme ist: $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$.
(i_0)			$\forall i \in L_2$: $\langle z, y\rangle \in \dot{g}(i)$. Nun ist L_2 aber kleiner als L, also nicht fast entscheidend.
x	z	y	Daher: $\neg\langle z, y\rangle \in \dot{f}(g)$, bzw. wegen Voll-
y	x	z	ständigkeit: $\langle y, z\rangle \in f(g)$. Aufgrund der
z	y	x	Transitivität kollektiver Präferenzen gilt: $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle y, z\rangle \in f(g) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)$.

Jedoch nur die Person i_o in L_1: $\langle x, z\rangle \in \dot{g}(i_o)$. Daher: $\langle x, z\rangle \in$ **fe**(i_o), d.h. die Person i_o ist fast entscheidend bezüglich des Paares x, z aus X.

Nun ist zu zeigen, daß diese Person nicht nur fast entscheidend bezüglich des Paares x, z ist, sondern **entscheidend** bezüglich **aller** geordneten Paare aus der Menge $\{x, y, z\}$.

Annahme: $\langle x, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o)$

i_o	i			
			$\langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Annahme
x	z	z	$\langle z, y\rangle \in \dot{f}(g)$	Bedingung **P**
z	x	y	$\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$	Transitivität
y				

Dieses Resultat darf wegen Bedingung **I** nicht von den individuellen Ordnungen bezüglich x, z oder z, y abhängig sein, daher: $\langle x, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbf{e}(i_o) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbf{fe}(i_o)$ (1)

i_o	i			
			$\langle y, x\rangle \in \dot{f}(g)$	Bedingung **P**
y	z	y	$\langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Annahme
x	x	x	$\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Transitivität
z				

$\langle x, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o) \Rightarrow \langle y, z\rangle \in \mathbf{e}(i_o) \Rightarrow \langle y, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o)$ (2)

i_o	i			
			$\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$	Wegen (1)
x	y	y	$\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Bedingung **P**
y	x	z	$\langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Transitivität
z				

$\langle x, y\rangle \in \mathbf{fe}(i_o) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \mathbf{e}(i_o) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o)$ (3)

Auf die gleiche Weise kann gezeigt werden, daß i_o auch bezüglich der restlichen geordneten Paare aus $\{x, y, z\}$, nämlich $\langle z, y\rangle$, $\langle y, x\rangle$ und $\langle z, x\rangle$ **entscheidend** ist.

Es ergibt sich:

$$\langle x, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_0) \;\Rightarrow\; \langle x, y\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$
$$\Rightarrow\; \langle y, z\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$

$$\langle x, y\rangle \in \mathbf{fe}(i_o) \;\Rightarrow\; \langle x, z\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$
$$\Rightarrow\; \langle z, y\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$

$$\langle y, z\rangle \in \mathbf{fe}(i_o) \;\Rightarrow\; \langle y, x\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$
$$\Rightarrow\; \langle z, x\rangle \in \mathbf{e}(i_o)$$

Daher ist i_o entscheidend für **alle** geordneten Paare aus der Menge $\{x, y, z\}$ und demnach der **Diktator** bezüglich dieser Menge.

Die Menge $\{x, y, z\}$ kann schrittweise um zusätzliche Alternativen erweitert werden. Dann läßt sich zeigen, daß i_o auch für die zusätzlichen geordneten Paare entscheidend ist, d.h. diese Person ist der **Diktator** bezüglich einer beliebig großen Menge von Alternativen.

Damit erweist sich, daß eine KWF, die die Bedingungen **P** und **I** erfüllt, nicht der Bedingung **D** gehorcht, die einen Diktator ausschließt. Folglich kann eine KWF nicht stets zugleich die Bedingungen **D**, **P** und **I** erfüllen.

Arrows ursprüngliche Bedingungen:

Bedingung **AE** (**Ausschluß der Erzwingung**):
$\forall x, y \in X: \exists g \in G: [\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Bedingung **M** (**Monotonizität** bzw. **Nicht-negative Reaktion**):
$\forall x \in X: \forall g, g' \in G: [[\forall i \in K: \forall y \in X: (\langle x, y\rangle \in g(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i) \wedge$
$(\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{g}'(i)) \;\wedge\; (\forall a, b \neq x, y: \langle a, b\rangle \in g(i) \Rightarrow \langle a, b\rangle \in g'(i))]$
$\Rightarrow\; [\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g')]]$.

Arrows ursprüngliches Theorem:

Es gibt keine KWF, die den Bedingungen **AE**, **M**, **D** und **I** genügt.

Das reduziert sich zur obigen Formulierung von Arrows Theorem, wenn man die folgende Implikation beachtet: Unter Voraussetzung von **I** gilt: **AE** $\wedge$ **M** $\Rightarrow$ **P**.

Arrows Festlegungen im Zusammenhang:

(a) Ausschluß der Erzwingung der kollektiven Präferenz durch eine äußere Instanz **gegen** die übereinstimmenden individuellen Präferenzen (Implikation der Bedingung **P**);
(b) Ausschluß der Konzentration der Entscheidungsmacht auf **eine** Person (Bedingung **D**);
(c) **Freiheit der Wahl** der individuellen Präferenz (Implikation der Bedingung **U** bzw. unserer Definition der KWF);
(d) **'Neutralität'** des Entscheidungsverfahrens in dem Sinne, daß zwei in sonst unterschiedlichen Präferenzstrukturen gleich zueinander stehende Alternativen zu gleichen kollektiven Entscheidungen bezüglich dieser zwei Alternativen führen müssen (Bedingung **I**).

Entscheidungsbeteiligung: (a) und (b)

Ausgeschlossen wird eine 'Erzwingung von Außen' sowie ein diktatorisches Verfahren, nicht mehr.

'Freiheit der Wahl': (c)

Politisch:	Jeder Beteiligte kann selbst seine Präferenzen wählen und über Änderungen seiner Präferenzen bestimmen.
Technisch:	Die KWF soll für jede mögliche Präferenzstruktur 'funktionieren', d.h. ein Resultat liefern. Man will vermeiden, daß man die Aggregationsregel wechseln muß, wenn bestimmte Präferenzstrukturen nicht zu konsistenten Resultaten führen.

'Neutralität': (d)

Politisch:	Einführung eines Elements von 'Fairness': Der bei einer Entscheidung Unterlegene kann das Ergebnis akzeptieren, da es aufgrund eines fairen, weil 'neutralen' Verfahrens zustande gekommen ist.
Technisch:	Einführung eines Elements von Vorhersagbarkeit oder Regelhaftigkeit: Welche Entscheidungsregel auch immer Anwendung findet, sie muß für zwei Alternativen zum gleichen Resultat führen, wenn sich an der Stellung dieser beiden Alternativen in zwei ansonsten unterschiedlichen Präferenzstrukturen nichts ändert.

Fazit:

Unabhängig von der Entscheidungsbeteiligung liegen die *'Freiheit der Wahl'* und die *'Neutralität des Verfahrens'* in Konflikt miteinander. Man kann nicht beides gleichzeitig haben – bzw. nur mit Abstrichen.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar:
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
23. Mai 2000

Das Vetogruppen-Theorem

Definitionen:

Eine Aggregationsregel AR ist eine **Quasitransitive Kollektive Entscheidungsfunktion** (QKEF): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [f(g) ist reflexiv, vollständig und quasitransitiv].

Quasitransitivität: $\forall x, y, z \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle y, z\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Eine Aggregationsregel AR ist eine **Azyklische Kollektive Entscheidungsfunktion** (AKEF): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [f(g) ist reflexiv, vollständig und azyklisch].

Azyklizität: $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X: [\langle x_1, x_2\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \ldots \wedge \langle x_{n-1}, x_n\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \neg\langle x_n, x_1\rangle \in \dot{f}(g)$ bzw. wegen Vollständigkeit: $\langle x_1, x_n\rangle \in f(g)]$.

Beispiele für QKEF: **Einstimmigkeitsregel** (**ER**) und **Erweiterte Einstimmigkeitsregel** (**EER**)

ER: $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \Leftrightarrow \forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i)]$.

EER: $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in f(g) \Leftrightarrow \neg[\forall i \in K: \langle y, x\rangle \in g(i) \wedge \exists j \in K: \langle y, x\rangle \in \dot{g}(i)]]$.

Striktes Pareto-Prinzip:

$\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \wedge \exists j \in K, j \neq i: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Theorem:

Es gibt eine QKEF, die den Bedingungen **D**, **P** und **I** gehorcht: die EER.

D:	$\exists j \in K: \langle x, y\rangle \in g(j) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f(g)$	wg. Def. EER
	$\exists i \notin K: \forall \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f(g)]$	wg. Def. EER
P:	$\forall i \in K: \forall g \in G: [\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$	wg. Def. EER
I:	$\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i)$	Annahme (1)
	$\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Rightarrow \forall i \in K: \neg\langle y, x\rangle \in g(i)$	aus Annahme
	$\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)$	Annahme (2)
	$\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$ sowie $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g')$	aus Annahme
	$\forall i \in K: \langle y, x\rangle \in \dot{g}(i)$	Annahme
	$\langle y, x\rangle \in \dot{f}(g)$ sowie $\langle y, x\rangle \in \dot{f}(g')$	Analog
	$\exists i, j \in K: [\langle x, y\rangle \in g(i) \wedge \langle y, x\rangle \in g(i)]$	Annahme
	$\langle x, y\rangle \in f(g) \wedge \langle y, x\rangle \in f(g)$	
	$\langle x, y\rangle \in f(g') \wedge \langle y, x\rangle \in f(g')$	
	$\forall g, g' \in G: \forall x, y \in X: [[\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)]$	
	$\Rightarrow [\langle x, y\rangle \in f(g) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f(g')]]$	

Vetogruppen-Theorem:

Es gibt keine QKEF, die den Bedingungen **P**, **I** und **VG** gehorcht.

Beweisgang:

Eine QKEF, die **P** und **I** gehorcht, erfüllt nicht **VG**, d.h. dann gibt es eine **Vetogruppe**.

Definitionen:

Eine Person $i \in K$ ist **halbentscheidend** bezüglich $x, y \in X$, d.h.
$\langle x, y\rangle \in$ **he**(i): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: $[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f(g)]$.

Eine Person $i \in K$ ist **fast halbentscheidend** bezüglich $x, y \in X$, d.h.
$\langle x, y\rangle \in$ **fhe**(i): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: $[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \wedge \forall j \in K, i \neq j$: $\langle y, x\rangle \in \dot{g}(j) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f(g)]$.

Eine Person i_o ist **Vetoinhaber** in L: $\Leftrightarrow L \subseteq K \wedge \forall g \in G$: $\forall x, y \in X$:
$[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i_o) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in f(g)]$

Eine Teilgruppe L ist eine **Vetogruppe**: $\Leftrightarrow L \subseteq K \wedge \#L \geq 2 \wedge \forall g \in G$: $\forall x, y \in X$:
$[\forall i \in L$: $\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)] \wedge$ [Alle $i \in L$ sind Vetoinhaber].

Bedingung **VG** (**Ausschluß von Vetogruppen**): Es darf keine Teilmenge L von K geben, die eine Vetogruppe ist.

Beweis:

Wegen Bedingung **P** ist für irgendein Paar von Alternativen die Menge K aller Individuen entscheidend und damit auch fast entscheidend. Es kann aber auch eine Teilgruppe L aus K fast entscheidend bzw. fast halbentscheidend sein. Was ist die kleinste fast halbentscheidende Gruppe?

Annahme: L ist eine **minimal entscheidende** Gruppe.

L_1	L_2	L_3
y	x	z
z	y	x
x	z	y

Wegen der Annahme ist: $\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$. $\forall i \in L_2$: $\langle x, z\rangle \in \dot{g}(i)$. L_2 ist aber kleiner als L, also nicht fast entscheidend. Daher: $\neg\langle x, z\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \langle z, x\rangle \in f(g)$ (Vollständigkt). Nun gilt nur bei Transitivität: $\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle z, x\rangle \in f(g) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \dot{f}(g)$. Bei Quasitransitivität ist $\langle y, x\rangle \in f(g)$. Denn: wäre $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)$, dann müßte wegen der Quasitransitivität $\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle y, z\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \dot{f}(g)$ sein – im Widerspruch zu $\langle z, x\rangle \in f(g)$. Daher $\neg\langle x, y\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in f(g)$.

Es zieht aber nur die Teilgruppe L_1 y gegenüber x vor. Also ist L_1 fast halbentscheidend, d.h. in L gibt es eine Teilgruppe, die für ein Paar von Alternativen fast halbentscheidend ist.

Sind die Mitglieder in L_1 Vetoinhaber? Annahme: i aus L_1 ist fast halbentscheidend für das Paar x, y, d.h. $\langle x, y\rangle \in$ **he**(i).

i	j			
			$\langle x, y\rangle \in f(g)$	Annahme
			$\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$	Bedingung **P**
x	y	y	$\langle x, z\rangle \in f(g)$, denn bei $\langle z, x\rangle \in \dot{f}(g)$	
y	x	z	wäre $\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle z, x\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow$	Quasi-

z	$\langle y, x\rangle \in \dot{f}(g)$ – im Widerspruch zur	transitivität
	Annahme. Daher: $\neg \langle z, x\rangle \in \dot{f}(g)$	
	$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in f(g)$.	Vollständigkeit

Dieses Resultat darf wegen Bedingung **I** nicht von den individuellen Ordnungen bezüglich x, y oder y, z abhängig sein. Daher: $\langle x, y\rangle \in$ **fhe**(i) $\Rightarrow \langle x, z\rangle \in$ **he**(i) $\Rightarrow \langle x, z\rangle \in$ **he**(i).

i j	$\langle z, x\rangle \in \dot{f}(g)$	Bedingung **P**
________	$\langle x, y\rangle \in f(g)$	Annahme
z y z	$\langle z, y\rangle \in f(g)$, denn bei $\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$	
x x x	wäre $\langle y, z\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle z, x\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow$	Quasi-
y	$\langle y, x\rangle \in \dot{f}(g)$ – im Widerspruch zur	transitivität
	Annahme. Daher: $\neg \langle y, z\rangle \in \dot{f}(g)$	
	$\Rightarrow \langle z, y\rangle \in f(g)$.	Vollständigkeit
	$\langle x, y\rangle \in$ **fhe**(i) $\Rightarrow \langle z, y\rangle \in$ **he**(i)	
	$\Rightarrow \langle z, y\rangle \in$ **fhe**(i)	

Auf die gleiche Weise kann gezeigt werden, daß i auch bezüglich der restlichen geordneten Paare aus $\{x, y, z\}$ **halbentscheidend** ist. Eine Person, die halbentscheidend für **alle** geordneten Paare aus einer Menge von Alternativen ist, ist ein **Vetoinhaber**.

Die Mitglieder der fast halbentscheidenden Teilgruppe von L sind demnach Vetoinhaber. Das ist eine der Voraussetzungen dafür, daß L eine Vetogruppe ist.

Nach Bedingung **P** ist die Teilgruppe L aus K entscheidend und damit auch fast entscheidend. Aufgrund des Arrow'schen Beweises gilt: Ist L fast entscheidend für **ein** geordnetes Paar aus X, so ist sie entscheidend für **alle** Paare aus X und damit eine Vetogruppe.

Dabei muß L mindestens 2 Mitglieder umfassen, da weder L_1, noch L_2 leere Mengen sein können. Bei 3 und mehr Mitgliedern gibt es in der Vetogruppe L stets eine Teilgruppe L′, die bezüglich L ihrerseits eine Vetogruppe ist.

Azyklizität

Eine Aggregationsregel AR ist eine **Azyklische Kollektive Entscheidungs-funktion** (AKEF): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [f(g) ist reflexiv, vollständig und azyklisch].

Azyklizität: $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$: $[\langle x_1, x_2\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \ldots \wedge$ $\langle x_{n-1}, x_n\rangle \in \dot{f}(g) \Rightarrow \neg\langle x_n, x_1\rangle \in \dot{f}(g)$ bzw. wegen Vollständigkeit: $\langle x_1, x_n\rangle \in f(g)]$.

Bedingung **V** (**Ausschluß von Vetoinhabern**): Es darf keine Person i in K geben, die **Vetoinhaber** ist.

1	2	3	4	5	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	$\langle x_1, x_2\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in \dot{f}(g)$
x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	$\wedge \langle x_3, x_4\rangle \in \dot{f}(g) \wedge \langle x_4, x_5\rangle \in \dot{f}(g)$
x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	$\wedge \langle x_5, x_1\rangle \in \dot{f}(g)$
x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	

Azyklizität ist verletzt, d.h. entweder ist f keine AKEF, wenn **V** erfüllt ist, es also keinen **Vetoinhaber** gibt, oder f ist eine AKEF, dann kann **V** nicht erfüllt sein.

Seien L_1, L_2, …, L_k entscheidende Gruppen, dann ist ein **Vetokollegium** die Schnittmenge dieser Gruppen, d.h. es umfaßt alle Personen $i \in \cap L_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Beispiel: $K = \{1, 2, 3, 4\}$

Entscheidende Gruppen: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$

Schnittmenge: $\{1, 2\}$

Tritt zur Schnittmenge die Person 3 oder 4 hinzu entsteht eine entscheidende Gruppe.

Bedingung **VK** (**Ausschluß des Vetokollegiums**): Es darf kein **Vetokollegium** $\cap L_j$ geben und keine weitere Gruppe $L \in Pot(K)$, so daß $\{\cap L_j \cup L\} \in \{L_1, \ldots, L_k\}$ und $\forall i \in \{\cap L_j \cup L\}$: $[\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{f}(g)]$.

Theorem:

Unter Voraussetzung von $\#X \geq \#K$ gibt es keine AKEF, die den Bedingungen **P**, **I** und **VK** genügt.

Auswahlfunktionen

Es kann Fälle geben, in denen eine Auswahl aus einer Alternativenmenge getroffen werden soll, ohne daß eine Präferenzrelation R vorliegt.

Eine **allgemeine Auswahlfunktion** a ordnet jeder Teilmenge S von X **beste** Elemente zu, so daß $a: Pot(X) \ni S \mapsto S^* \subset S$, wobei S^* die Menge der besten Elemente ist.

Was in S bestes Element ist, wird durch die Auswahlfunktion festgelegt: x ist bestes Element in S genau dann, wenn $x \in a(S)$ ist. Bestes Element ist hier der Grundbegriff und S* bzw. a(S) ist die **allgemeine Auswahlmenge**.

Gegenüber dem allgemeinen gibt es den spezifischen Fall, in dem eine Präferenzrelation R vorliegt. Dann kann es in einer Teilmenge S von X beste Elemente **bezüglich dieser** Relation R geben.

Eine **spezifische Auswahlfunktion** a_R ordnet jeder Teilmenge S von X die Menge der besten Elemente bezüglich R zu, so daß a_R: $Pot(X) \ni S \mapsto A(S, R) \subset S$.

Dabei umfaßt die spezifische Auswahlmenge A(S, R) die schwach präferierten, d.h. besten Alternativen einer Menge X bezüglich einer Präferenzrelation R, so daß $A(S, R) := \{x \mid x \in S \wedge \forall y \in S: \langle x, y\rangle \in R$.

In diesem Zusammenhang ist das beste Element nicht mehr Grundbegriff, sondern von der Präferenzrelation R abgeleitet.

$\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow A(\{x, y\}, R) = \{x\}$
$\langle x, y\rangle \in I \Leftrightarrow A(\{x, y\}, R) = \{x, y\}$

Eine Auswahlfunktion a oder a_R ist **wohlbestimmt**, wenn die Auswahlmenge für keine Alternativenmenge S aus X leer ist.

Für Kollektive Auswahlfunktionen soll nun gefordert werden, daß sie für beliebige Präferenzstrukturen g eine nicht-leere Auswahlmenge a(S) für jede Alternativenmenge S, $S \subset X$, festlegen. Dabei müssen Zyklen strikter kollektiver Präferenzen in Indifferenzklassen verwandelt werden. Dazu ist die transitive Schließung einer Relation R erforderlich.

Ist R eine beliebige zweistellige Relation auf X, dann ist ihre **transitive Schließung** R* eine ebenfalls zweistellige Relation auf X, für die gilt: $\langle x, y\rangle \in R^*: \Leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_k \in X: [\langle z_1, z_2\rangle \in R \wedge \langle z_2, z_3\rangle \in R \wedge \ldots \wedge \langle z_{k-1}, z_k\rangle \in R \wedge x = z_1 \wedge y = z_k \wedge x \neq y]$.

Zusätzlich benötigen wir den Begriff des asymmetrischen Teils einer Relation R.

Ist R eine Präferenzrelation auf X, dann ist ihr **asymmetrischer Teil** R^{as} eine Präferenzrelation auf X, für die gilt: $\langle x, y\rangle \in R^{as}: \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in R \wedge \neg \langle y, x\rangle \in R]$.

Für die schwache kollektive Präferenzrelation f(g) = R ist R^{as} identisch mit der strikten kollektiven Präferenzrelation $\dot{f}(g) = P$. Wir benötigen R^{as} für die Definition der Maximalität der Alternativenmenge S, $S \subset X$, bezüglich einer Relation R.

Die **Maximalität** einer Alternativenmenge $S \subset X$ bezüglich einer Relation R ist: $M(S, R) := \{x \mid x \in S \wedge \neg \exists y \in S: \langle y, x\rangle \in R^{as}\}$.

Ist R reflexiv, vollständig und transitiv, also eine Ordnung, so gilt für jedes $S \subset X$: A(S, R) = M(S, R).

Die Auswahlmenge a(S) aus S soll nun die **Maximalität** von S sein, wobei entweder die transitive Schließung der schwachen kollektiven Präferenz:

$$f(g) = R, \text{ so daß } a(S) = M(S, R^*)$$

oder die transitive Schließung der strikten kollektiven Präferenz:

$$\dot{f}(g) = P, \text{ so daß } a(S) = M(S, P^*)$$

herangezogen wird.

Ist die Auswahlfunktion a wohlbestimmt, d.h. legt a für beliebige Präferenzstrukturen g jeweils für alle nicht-leeren Teilmengen S von X eine nicht-leere Auswahlmenge a(S) fest, so nennen wir die zugrundeliegende Aggregationsregel AR f – R = f(g) bzw. P = $\dot{f}(g)$ – eine Kollektive Auswahlfunktion (KAF).

Eine AR f ist eine **Kollektive Auswahlfunktion** (KAF): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [a ist wohlbestimmt $\wedge$ a(S) = M(S, R*)].

Die Bedingungen von Arrow können nun wie folgt für Kollektive Auswahlfunktionen umformuliert werden.

Bedingung $\hat{\mathbf{D}}$: $\neg\exists i \in K: \forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow a(\{x, y\}) = \{x\}]$.

Bedingung $\hat{\mathbf{P}}$: $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow a(\{x, y\}) = \{x\}]$.

Bedingung $\hat{\mathbf{I}}$: $\forall g, g' \in G: \forall S \subset X: [\forall i \in K: \forall x, y \in S: [\langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)] \Rightarrow [a(S) = a'(S)]$.

Die Abschwächung der Anforderung an das Aggregationsreslutät – nur eine Auswahlmenge, keine Präferenzrelation – erlaubt das folgende Möglichkeitstheorem.

Theorem:

Es gibt eine Kollektive Auswahlfunktion (KAF), die den Bedingungen $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{P}}$ und $\hat{\mathbf{I}}$ gehorcht.

Die Mehrheitsregel (MR) ist eine KAF, die den Bedingungen gehorcht, wenn auf sie die Maximalität der transitiven Schließung angewandt wird.

Die **Mehrheitsregel** (MR) ist eine KAF: $\Leftrightarrow \forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in f(g) \Leftrightarrow \#\{i \mid \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i)\} \geq \#\{i \mid \langle y, x\rangle \in \dot{g}(i)\}]$.

Die MR verwandelt die zyklische Präferenzfolge, die beim Abstimmungsparadox entsteht, in eine Indefferenzklasse. Damit verbleiben **alle** Alternativen in der Auswahlmenge, so daß eine Auswahl eigentlich nicht stattfindet.

Weiteres Problem: Bedingung $\hat{\mathbf{P}}$ erlaubt trotz des auswahlfunktionalen Zusammenhangs eine paarweise Aggregation der Alternativen. Wird die Pareto-Bedingung auswahlfunktional formuliert, ergibt sich:

Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$: $\forall g \in G$: $\forall x, y \in X$: $[\forall i \in K$: $\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow [\forall S \subset X$: $[x \in S \Rightarrow$
$y \notin a(S)]]]$.

Diese Pareto-Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ kann leicht mit den Verfahren der (schwachen oder strikten) Maximalität der transitiven Schließung, angewandt auf die Mehrheitsregel, in Konflikt geraten.

Beispiel:

i	j	k	
			Paarweise Aggregation mittels der Mehrheitsregel ergibt eine zyklische Präferenzfolge:
x	y	z	$\langle x, y\rangle \in P$, $\langle y, z\rangle \in P$, $\langle z, w\rangle \in P$ und $\langle w, x\rangle \in P$.
y	z	w	Transitive Schließung führt zu: $a(\{x, y, z, w\} = \{x, y, z, w\}$.
z	w	x	Aber: z wird von **allen** Beteiligten gegenüber w vorgezogen,
w	x	y	müßte also nach $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ aus der Auswahlmenge herausfallen.

Die Verfahren der transitiven Schließung können Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ verletzen.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar:
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
30. Mai 2000

Kollektive Auswahlfunktionen

Stimmentausch

Zwei Personen, 1 und 2

Alternativen: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$x_1 = (a, b),\ x_2 = (a, \neg b),\ x_3 = (\neg a, b),\ x_4 = (\neg a, \neg b)$$

Präferenzen:

1	2
$x_2 = (a, \neg b)$	$x_3 = (\neg a, b)$
$x_1 = (a, b)$	$x_1 = (a, b)$
$x_4 = (\neg a, \neg b)$	$x_4 = (\neg a, \neg b)$
$x_3 = (\neg a, b)$	$x_2 = (a, \neg b)$

Die Anwendung der Erweiterten Einstimmigkeitsregel (EER) auf die komponentenweise Abstimmung ergibt:

$$\langle a, \neg a\rangle \in I \quad \text{und} \quad \langle b, \neg b\rangle \in I.$$

Das bedeutet: Erhaltung des Status quo = $(\neg a, \neg b)$

Stimmentausch: Verzicht von 1 auf $\neg b$ und von 2 auf $\neg a$

Führt zu: $\langle (a, b), (\neg a, \neg b)\rangle \in P$

Modell des **politischen Kompromisses**

Voraussetzungen:

(1) Überwindung Status quo (2) Möglichkeit Drohung (3) Angebot

1	2	3
$(a, \neg b)$	$(\neg a, b)$	$(\neg a, \neg b)$
(a, b)	(a, b)	$(\neg a, b)$
$(\neg a, \neg b)$	$(\neg a, \neg b)$	$(a, \neg b)$
$(\neg a, b)$	$(a, \neg b)$	(a, b)

Nach der Mehrheitsregel:

$a, \neg a \Rightarrow \neg a, \quad b, \neg b \Rightarrow \neg b$

Resultat: $(\neg a, \neg b)$, aber:

1 + 2: $\langle(a, b), (\neg a, \neg b)\rangle \in P_{1, 2}$

2 + 3: $\langle(\neg a, b), (a, b)\rangle \in P_{2, 3}$

1 + 3: $\langle(\neg a, \neg b), (\neg a, b) \in P_{1, 3}$

Auswahlfunktionen

Es kann Fälle geben, in denen eine Auswahl aus einer Alternativenmenge getroffen werden soll, ohne daß eine Präferelation R vorliegt.

Eine **allgemeine Auswahlfunktion** a ordnet jeder Teilmenge S von X **beste** Elemente zu, so daß a: $Pot(X) \ni S \mapsto S^* \subset S$, wobei S* die Menge der besten Elemente ist.

Was in S bestes Element ist, wird durch die Auswahlfunktion festgelegt: x ist bestes Element in S genau dann, wenn $x \in a(S)$ ist. Bestes Element ist hier der Grundbegriff und S* bzw. a(S) ist die **allgemeine Auswahlmenge**.

Gegenüber dem allgemeinen gibt es den spezifischen Fall, in dem eine Präferenzrelation R vorliegt. Dann kann es in einer Teilmenge S von X beste Elemente **bezüglich dieser** Relation R geben.

Eine **spezifische Auswahlfunktion** a_R ordnet jeder Teilmenge S von X die Menge der besten Elemente bezügl. R zu, so daß:
a_R: Pot(X) $\ni S \mapsto A(S, R) \subset S$.

Dabei umfaßt die spezifische Auswahlmenge A(S, R) die schwach präferierten, d.h. besten Alternativen einer Menge X bezüglich einer Präferenzrelation R, so daß $A(S, R) := \{x \mid x \in S \wedge \forall y \in S: \langle x, y\rangle \in R\}$.

In diesem Zusammenhang ist das beste Element nicht mehr Grundbegriff, sondern von der Präferenzrelation R abgeleitet.

$\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow A(\{x, y\}, R) = \{x\}$
$\langle x, y\rangle \in I \Leftrightarrow A(\{x, y\}, R) = \{x, y\}$

Eine Auswahlfunktion a oder a_R ist **wohlbestimmt**, wenn die Auswahlmenge für keine Alternativenmenge S aus X leer ist.

Für Kollektive Auswahlfunktionen soll nun gefordert werden,daß sie für beliebige Präferenzstrukturen g eine nicht-leere Auswahlmenge a(S) für jede Alternativenmenge S, $S \subset X$, festlegen. Dabei müssen Zyklen strikter kollektiver Präferenzen in Indifferenzklassen verwandelt werden. Dazu ist die transitive Schließung einer Relation R erforderlich.

Ist R eine beliebige zweistellige Relation auf X, dann ist ihre **transitive Schließung** R* eine ebenfalls zweistellige Relation auf X, für die gilt:
$\langle x, y\rangle \in R^*: \Leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_k \in X: [\langle z_1, z_2\rangle \in R \wedge \langle z_2, z_3\rangle \in R \wedge \ldots \wedge \langle z_{k-1}, z_k\rangle \in R \wedge$
$x = z_1 \wedge y = z_k \wedge x \neq y]$.

Zusätzlich benötigen wir den Begriff des asymmetrischen Teils einer Relation R.

Ist R eine Präferenzrelation auf X, dann ist ihr **asymmetrischer Teil** R^{as} eine Präferenzrelation auf X, für die gilt: $\langle x, y\rangle \in R^{as}: \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in R \wedge \neg \langle y, x\rangle \in R]$.

Für die schwache kollektive Präferenzrelation f(g) = R ist R^{as} identisch mit der strikten kollektiven Präferenzrelation $\dot{f}(g) = P$. Wir benötigen R^{as} für die Definition der Maximalität einer Alternativenmenge S, $S \subset X$, bezüglich einer Relation R.

Die **Maximalität** einer Alternativenmenge $S \subset X$ bezüglich einer Relation R ist: $M(S, R) := \{x \mid x \in S \wedge \neg \exists y \in S: \langle y, x\rangle \in R^{as}\}$.

Ist R reflexiv, vollständig und transitiv, also eine Ordnung, so gilt für jedes $S \subset X$: A(S, R) = M(S, R).

Die Auswahlmenge a(S) aus S soll nun die **Maximalität** von S sein, wobei entweder die transitive Schließung der schwachen kollektiven Präferenz:

$$f(g) = R, \text{ so daß } a(S) = M(S, R^*)$$

oder die transitive Schließung der strikten kollektiven Präferenz:

$$\dot{f}(g) = P, \text{ so daß } a(S) = M(S, P^*)$$

herangezogen wird.

Ist die Auswahlfunktion a wohlbestimmt, d.h. legt a für beliebige Präferenzstrukturen g jeweils für alle nicht-leeren Teilmengen S von X eine nicht-leere Auswahlmenge a(S) fest, so nennen wir die zugrundeliegende Aggregationsregel AR f – R = f(g) bzw. P = $\dot{f}(g)$ – eine Kollektive Auswahlfunktion (KAF).

Eine AR f ist eine **Kollektive Auswahlfunktion** (KAF): $\Leftrightarrow \forall g \in G$: [a ist wohlbestimmt $\wedge$ a(S) = M(S, R*)].

Die Bedingungen von Arrow können nun wie folgt für Kollektive Auswahlfunktionen umformuliert werden.

Bedingung $\hat{\mathbf{D}}$: $\neg\exists i \in K: \forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow a(\{x, y\}) = \{x\}]$.

Bedingung $\hat{\mathbf{P}}$: $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow a(\{x, y\}) = \{x\}]$.

Bedingung $\hat{\mathbf{I}}$: $\forall g, g' \in G: \forall S \subset X: [\forall i \in K: \forall x, y \in S: [\langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)] \Rightarrow [a(S) = a'(S)]$.

Die Abschwächung der Anforderung an das Aggregationsresultat – nur eine Auswahlmenge, keine Präferenzrelation – erlaubt das folgende Möglichkeits-theorem.

Theorem:

Es gibt eine Kollektive Auswahlfunktion (KAF), die den Bedingungen $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{P}}$ und $\hat{\mathbf{I}}$ gehorcht.

Die Mehrheitsregel (MR) ist eine KAF, die den Bedingungen gehorcht, wenn auf sie die Maximalität der transitiven Schließung angewandt wird.

Die **Mehrheitsregel** (MR) ist eine KAF: $\Leftrightarrow \forall g \in G: \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in f(g) \Leftrightarrow \# \{i \mid \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \geq \# \{i \mid \langle y, x\rangle \in \dot{g}(i)]$.

Die MR verwandelt die zyklische Präferenzfolge, die beim Abstimmungsparadox entsteht, in eine Indifferenzklasse. Damit verbleiben **alle** Alternativen in der Auswahlmenge, so daß eine Auswahl eigentlich nicht stattfindet.

Weiteres Problem: Bedingung $\hat{\mathbf{P}}$ erlaubt trotz des auswahlfunktionalen Zusammenhangs eine paarweise Aggregation der Alternativen. Wird die Pareto-Bedingung auswahlfunktional formuliert, ergibt sich:

Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$: $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i) \Rightarrow [\forall S \subset X: [x \in S \Rightarrow y \notin a(S)]]]$.

Diese Pareto-Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ kann leicht mit den Verfahren der (schwachen oder strikten) Maximalität der transitiven Schließung, angewandt auf die Mehrheitsregel, in Konflikt geraten.

Beispiel:

i	j	k	
			Paarweise Aggregation mittels der Mehrheitsregel ergibt eine zyklische Präferenzfolge:
x	y	z	$\langle x, y\rangle \in P$, $\langle y, z\rangle \in P$, $\langle z, w\rangle \in P$ und $\langle w, x\rangle \in P$.
y	z	w	Transitive Schließung führt zu: $a(\{x, y, z, w\} = \{x, y, z, w\}$.
z	w	x	Aber: z wird von **allen** Beteiligten gegenüber w vorgezogen,
w	x	y	w müßte also nach $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ aus der Auswahlmenge herausfallen.

Die Verfahren der transitiven Schließung können Bedingung $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}}$ verletzen.

Alternative Bedingung $\hat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{A}}$: $\forall g \in G: \forall X' \in Pot(X), X'' \subset X': \forall x, y$ so daß

$$x \in X'' \wedge y \in X' \wedge y \notin X'': [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Rightarrow a(X') \subseteq X'']$$

Präferenzstruktur wie oben ergibt unter $\hat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{A}}$:

$X' = \{z, w\}, X'' = \{z\}, w \in X', w \notin X'', z \in X''$:

$\langle z, w\rangle \in g(i) \Rightarrow a(\{z, w\}) \subseteq \{z\}$

$X' = \{z, w, x\}, X'' = \{z, x\}, w \in X', w \notin X'', z \in X''$:

$\langle z, w\rangle \in g(i) \Rightarrow a(\{z, w, x\}) \subseteq \{z, x\}$

$X' = \{z, w, x, y\}, X'' = \{z, x, y\}, w \in X', w \notin X'', z \in X''$:

$\langle z, w\rangle \in g(i) \Rightarrow a(\{z, w, x, y\}) \subseteq \{z, x, y\}$

$X' = \{z, w, x\}, X'' = \{z, w\}, x \in X', x \notin X'', z \in X''$:

$\langle z, x\rangle \in g(i) \Rightarrow a(\{z, w, x\}) \subseteq \{z, w\}$

Auswahlfunktionale Mehrheitsregel (**AMR**)

Eine KAF ist die **AMR**: $\Leftrightarrow$ $\forall g \in G: \forall x, y \in X: [a(\{x, y\}) = \{x\}$

$\Leftrightarrow \#\{i \mid \langle x, y\rangle \in \dot{g}(i)\} > \#\{i \mid \langle y, x\rangle \in \dot{g}(i)\}$

Angewandt auf obige Präferenzstruktur: $a(\{x, y, z, w\} = \{x, y, z, w\}$

Problem: Unangemessen große Indifferenzklassen, daher: **Strikte** KWF und KAF

Definitionen:

Eine Präferenzrelation R ist **asymmetrisch**: $\Leftrightarrow \forall x, y \in X: [\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R]$

Präferenzrelationen R, die vollständig, transitiv und asymmetrisch sind, heißen **Strikte Ordnungen**.

Strikte Kollektive Wohlfahrtsfunktionen(**SKWF**):

Eine AR $\hat{f}$ ist eine **SKWF**: $\Leftrightarrow \forall g \in G, \forall X' \in Pot(X), \#X' \geq 3$:

[$\hat{f}(g)$ ist vollständig, transitiv und asymmetrisch]

Eingeschränkte Strikte Kollektive Wohlfahrtsfunktionen (**S*KWF**)

$\Rightarrow$ Definitionsbereich: Strikte individuelle Ordnungen $g^S \in G^S$

Eine AR $\hat{f}$ * ist eine **S*KWF**: $\Leftrightarrow \forall g \in G^S: \forall X' \in Pot(X), \#X' \geq 3$:

[$\hat{f}$ * ist vollständig, transitiv und asymmetrisch]

Arrows Bedingungen für Eingeschränkte Strikte Kollektive Wohlfahrtsfunktionen:

Bedingung **P***: $\forall g \in G^S: \forall x, y \in X', X' \in Pot(X)$:

$[\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \hat{f}^*]$

Bedingung **I***: $\forall g \in G^S: \forall x, y \in X': [[\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)]$

$\Rightarrow [\langle x, y\rangle \in \hat{f}^*(g) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \hat{f}^*(g')]]$

Bedingung **D***: $\neg\exists i \in K: \forall g \in G^S: \forall y \in X': [g(i) = \hat{f}^*(g)]$

Arrows Theorem für Eingeschränkte Strikte Kollektive Wohlfahrtsfunktionen:

Erfüllt eine **S*KWF** $\hat{f}^*$ die Bedingungen **P*** und **I***, kann sie nicht Bedingung **D*** erfüllen.

Strikte Kollektive Auswahlfunktionen (**SKAF**):

Eine Auswahlfunktion $\hat{a}$ ist eine **SKAF**: $\Leftrightarrow \forall g \in G$: $\forall X' \in Pot(X)$:
$[\#X' \geq 3 \;\Rightarrow \#\hat{a}_{f(g)}(X') = 1]$

Eingeschränkte Strikte Kollektive Auswahlfunktionen (**S*KAF**):

Eine Auswahlfunktion $\hat{a}^*$ ist eine **S*KAF**: $\Leftrightarrow \forall g \in G^S$: $\forall X' \in Pot(X)$:
$[\#X' \geq 3 \;\Rightarrow\; \#\hat{a}^*_{f(g)}(X') = 1]$

Manipulation und Strategisches Verhalten

Manipulation: Jedes Verhalten, durch das der Manipulator ein von ihm bevorzugtes Resultat herbeizuführen versucht.

Strategisches Verhalten: Manipulation der eigenen Präferenz, um ein bevorzugtes Resultat herbeizuführen.

Strategisches Verhalten ist Manipulation, aber nicht jede Manipulation strategisches Verhalten.

Beispiel: Plinius und der Römische Senat

Fraktionen im Senat: 1, 2 und 3

Alternativen: f für Freispruch, b für Bann, t für Todesstrafe

Präferenzstruktur g:

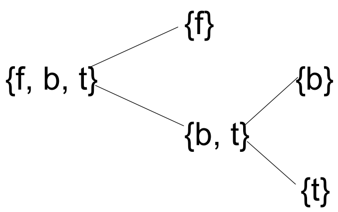
1	2	3
f	b	t
b	f	b
t	t	f

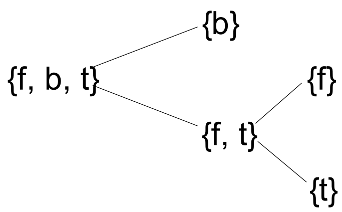
a({f, b}) = {b}, a({b, t}) = {b}, a({f, t}) = {f},

d.h. b ist der **Condorcet-Gewinner**

und a({f, b, t}) = {b}.

Abstimmungsfolgen bei **schrittweiser Reduktion** der Alternativenmenge:

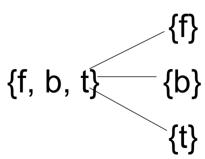




$\langle\{b, t\}\rangle, \{f\}\rangle \in \dot{f}(g)$, $\langle\{b\}, \{t\}\rangle \in \dot{f}(g)$ $\quad$ $\langle\{f, t\}, \{b\}\rangle \in \dot{f}(g)$, $\langle\{f\}, \{t\}\rangle \in \dot{f}(g)$

a({f, b, t}) = {b} $\quad$ a({f, b, t}) = {f}

Abstimmungsfolge bei **gleichzeitiger Abstimmung**:



a({f, b, t}) = {f}

Schrittweise Reduktion ist nicht **pfadunabhängig**, ebensowenig gleichzeitige Abstimmung. Wenn $\langle\{b\}, \{f\}\rangle \in \dot{g}(1)$, statt $\langle\{f\}, \{b\}\rangle \in \dot{g}(1)$, dann liegt strategisches Verhalten seitens Fraktion 1 vor, die Präferenzstruktur g ändert sich zu g':

1	2	3
b	b	t
f	f	b
t	t	f

Für alle Fraktionen: $\langle b, t\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle b, t\rangle \in g'(i)$

Nach Bedingung **I**: $\langle b, t\rangle \in \dot{f}(g) \Leftrightarrow \langle b, t\rangle \in \dot{f}(g')$

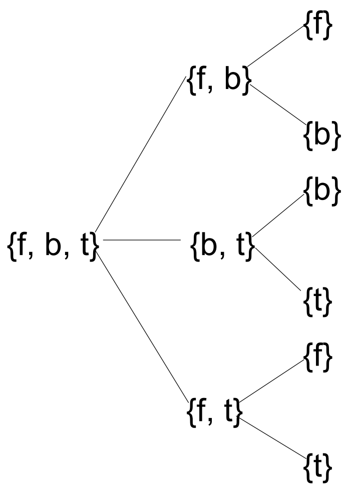
Bei gleichzeitiger Abstimmung aber:

$\langle b, t\rangle \in \tilde{f}(g)$ (ehrliche Stimmabgabe) und

$\langle b, t\rangle \in \dot{f}(g')$ (Strategische Stimmabgabe)

Bedingung **I** ist verletzt.

Abstimmungsfolge bei **vollständigem Paarvergleich**:



a({f, t}) = {f}
a({f, b}) = {b}
a({b, t}) = {b}
a({f, b, t}) = {b}

Abstimmungsfolge bei **schrittweisem Paarvergleich**:

$\{b\}$ a($\{b, t\}$) = $\{b\}$, wenn $\langle b, t\rangle \in \dot{g}(1)$

$\{b\} \Rightarrow \{b, f\}$ (Ehrliches Verhalten von 1)

$\{f\}$ Dann: a($\{b, f\}$) = $\{b\}$.

$\{f, b, t\} \Rightarrow \{b, t\}$

$\{t\}$ a($\{b, t\}$ = $\{t\}$, wenn $\langle t, b\rangle \in \dot{g}(1)$

$\{t\} \Rightarrow \{t, f\}$ (Strategisches Verhalten von 1)

$\{f\}$ Dann: a($\{t, f\}$) = $\{f\}$.

Die Abstimmungsfolge **Schrittweiser Paarvergleich** verletzt Pfadunabhängigkeit und Bedingung **I**.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
6. Juni 2000

Das Gibbard-Satterthwaite-Resultat

Arrows Bedingungen für Eingeschränkte Strikte Kollektive Auswahlfunktionen

Bedingung $\hat{\mathbf{P}}^*$: $\forall g \in G^S$: $\forall X' \in Pot(X)$, $X'' \subset X'$: $\forall x, y$, so daß $x \in X''$, $y \in X'$ und $x \notin X''$: $[\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in g(i) \Rightarrow \hat{a}^*_{f(g)}(X') \subseteq X'']$

Bedingung $\hat{\mathbf{I}}^*$: $\forall g, g' \in G^S$: $\forall x, y \in X'$, $X' \subset X$:

$[\forall i \in K: [\langle x, y\rangle \in g(i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in g'(i)] \Rightarrow [\hat{a}^*_{f(g)}(X') = \hat{a}^*_{f(g')}(X')]]$

Bedingung $\hat{\mathbf{D}}^*$: $\neg\exists i \in K$: $\forall g \in G^S$: $\forall x \in X'$, $X' \subset X$:

$[\langle \hat{a}^*_{f(g)}(X'), x\rangle \in g(i) \Rightarrow x \notin \hat{a}^*_{f(g)}(X')]$

Änderungen in Präferenzstrukturen

$g|g'(i) = \langle g(1), g(2), \ldots, g'(i), \ldots, g(n)\rangle$

$g|g''(1), g''(2) = \langle g''(1), g''(2), g(3), \ldots, g(n)\rangle$

Strategiefreiheit von Auswahlfunktionen

Eine Auswahlfunktion $\hat{a}^*$ ist **strategieanfällig** bezügl. $g \in G^S$: $\Leftrightarrow \exists i \in K$:

$[\exists g'(i) \in g^S \wedge \langle \hat{a}^*_{f(g|g'(i))}(X'), \hat{a}^*_{f(g)}(X')\rangle \in g(i)]$.

Strategisches Verhalten

g:			Punkt-	g’:		
i	j	k	werte	i	j	k
w	x	y	4	w	x	y
x	y	z	3	x	z	z
y	z	x	2	y	w	x
z	w	w	1	z	y	w

g: x = 9, y = 9, w = 6, z = 6
g’: x = 9, y = 7, w = 7, z = 7

Bedingung $\hat{\mathbf{S}}^*$ (**Strategiefreiheit**):

$\neg\exists g \in G^S: \exists i \in K: [\exists g'(i) \in g^S(i) \wedge \langle \hat{a}^*_{f(g|g'(i))}(X'), \hat{a}^*_{f(g)}(X')\rangle \in g(i)]$

Resultat von Gibbard und Satterthwaite

Erfüllt eine S*KAF $\hat{a}^*$ Bedingung $\hat{\mathbf{S}}^*$, dann kann sie nicht Bedingung $\hat{\mathbf{D}}^*$ erfüllen.

Beweisgang

Erfüllt die Auswahlfunktion nicht $\hat{\mathbf{I}}^*$, erfüllt sie auch nicht $\hat{\mathbf{S}}^*$.

Erfüllt die Auswahlfunktion nicht $\hat{\mathbf{P}}^*$, erfüllt sie auch nicht $\hat{\mathbf{S}}^*$.

Also muß sie $\hat{\mathbf{I}}^*$ und $\hat{\mathbf{P}}^*$ erfüllen, um $\hat{\mathbf{S}}^*$ zu erfüllen.

Konstruktion: Auswahlfunktion $\hat{a}^*$ äquivalent der S*KWF $\hat{f}^*$.

Aufgrund von Arrows Theorem gilt: Erfüllt die S*KWF $\hat{f}^*$ die Bedingungen $\mathbf{I}^*$ und $\mathbf{P}^*$, dann kann sie nicht Bedingung $\mathbf{D}^*$, d.h. dann gibt es einen Diktator.

Bedingung $\mathbf{D}^*$ impliziert Bedingung $\hat{\mathbf{D}}^*$, d.h. der $\hat{f}^*$-Diktator ist der $\hat{a}^*$-Diktator.

Also:

Erfüllt die Auswahlfunktion $\hat{a}^*$ Bedingung $\hat{\mathbf{S}}^*$, dann gibt es einen $\hat{a}^*$-Diktator.

$\neg\, \hat{\mathbf{I}}^* \;\Rightarrow\; \neg\, \hat{\mathbf{S}}^*$:

$\langle x, y\rangle \in g(i) \;\Leftrightarrow\; \langle x, y\rangle \in g'(i)$, jedoch $\hat{a}^*_{f(g)}(X') = \{x\}$ und $\hat{a}^*_{f(g|g'(i))}(X') = \{y\}$

Es ist entweder $\langle x, y\rangle \in g(i)$ oder $\langle y, x\rangle \in g(i)$.

Ist $\langle x, y\rangle \in g(i)$, wechselt i von g'(i) zu g, denn $\hat{a}^*_{f(g)}(X') = \{x\}$.

Der Wechsel verändert die Präferenzstruktur von $g|g'(i)$ zu g, also $\neg\hat{\mathbf{S}}^*$.

Ist $\langle y, x\rangle \in g(i)$, wechselt i von g zu g'(i), denn $\hat{a}^*_{f(g|g'(i))}(X') = \{y\}$.

Der Wechsel verändert die Präferenzstruktur von g zu $g|g'(i)$, also $\neg\hat{\mathbf{S}}^*$.

$\neg\, \hat{\mathbf{P}}^* \;\Rightarrow\; \neg\, \hat{\mathbf{S}}^*$:

$\hat{\mathbf{P}}^*$ besagt: Wenn $\forall i \in K$: $\langle x, y\rangle \in \dot{g}(i)$, fällt y aus der Auswahlmenge heraus.

Wenn $\hat{\mathbf{P}}^*$ nicht gilt, würde y in der Auswahlmenge verbleiben oder auch x herausfallen, d.h. bei Nicht-Geltung von $\hat{\mathbf{P}}^*$ ist die Auswahlmenge $\{x\}$ oder $\{y\}$ denkbar. Dann sind Präferenzstrukturen g und g' möglich, zwischen denen Entscheidungsbeteiligte wechseln können, um je nach ihrer Präferenz $\{x\}$ oder $\{y\}$ herbeizuführen. Gilt $\hat{\mathbf{P}}^*$ nicht, wird die Auswahlfunktion strategieanfällig.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
20.6. und 27.6.2000

Utilitaristisches Wohlfahrtsprinzip

Definitionen

Ein **Kollektives Wohlfahrtsprinzip** (**KWP**) ist eine Funktion **f**, so daß

$\mathbf{f}: U \ni u \mapsto R \in \text{Pot}(X \times X);\ R = \mathbf{f}(u)$ und $P = \dot{\mathbf{f}}(u)$.

Ordinale Vergleichbarkeit der individuellen Nutzen:

$\forall u, u' \in U: [\forall i \in K: \forall a \in \Re^{+}: \forall x \in X: au_i(x) = u'(x) \Rightarrow \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u')]$

		$u_i(x)$
$u_i(x)$	$u_j(y)$	$u_j(y)$
$u_i(y)$	$u_j(x)$	$u_i(y)$
		$u_j(x)$

Kardinale Vergleichbarket der individuellen Nutzen:

$\forall u, u' \in U: [\forall i \in K: \forall a, b \in \Re^{+}: au_i(x) + b = u'(x) \Rightarrow \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u')]$

Bsp.: Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit

$F = 1{,}8C + 32$ $\quad$ $20^0\ C = 1{,}8 \times 20^0 + 32\ F = 36^0 + 32\ F = 68^0\ F$

Kardinale Vergleichbarkeit kann zerlegt werden in **niveaubezogen** und **einheitenbezogen** kardinale Vergleichbarkeit.

Niveaubezogen kardinale Vergleichbarkeit:

$\forall u, u' \in U$: $[\forall i \in K$: $\forall a, b \in \Re^{+}$: $\forall x \in X$: $a_i u_i(x) + b = u'_i(x) \Rightarrow \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u')]$

Einheitenbezogen kardinale Vergleichbarkeit:

$\forall u, u' \in U$: $[\forall i \in K$: $\forall a, b \in \Re^{+}$: $\forall x \in X$: $a u_i(x) + b_i = u'_i(x) \Rightarrow \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u')]$

Erlaubt Aussagen der Form: $[u_i(x) - u_i(y)] > [u_j(x) - u_j(y)]$

Arrows Bedingungen für Kollektive Wohlfahrtsprinzipien:

Bedingung $\overline{\mathbf{D}}$: $\neg\exists i \in K$: $\forall u \in U$: $\forall x, y \in X$: $[u_i(x) > u_i(y) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)]$

Bedingung $\overline{\mathbf{P}}$: $\forall u \in U$: $\forall x, y \in X$: $[\forall i \in K$: $u_i(x) > u_i(y) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$

Bedingung $\overline{\mathbf{I}}$: $\forall u, u' \in U$: $\forall x, y \in X$: $[\forall i \in K$: $[u_i(x) = u'_i(x) \wedge u_i(y) = u'_i(y)]$

$\Rightarrow [\langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u')]]$

Verallgemeinerungen der Bedingungen:

Anonymität ($\overline{\mathbf{A}}$): $\forall i \in K$: $\forall u, u' \in U$: $\forall \pi \in \Pi$: $[u_i = u'_{\pi(i)} \Rightarrow \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(u')]$

Strikes Pareto-Prinzip ($\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{P}}$): $\forall x, y \in X$: $\forall u \in U$:$[[\forall i \in K$: $u_i(x) \geq u_i(y) \wedge$

$\exists j \in K$: $u_i(x) > u_i(y) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)] \wedge [\forall i \in K$: $u_i(x) = u_i(y) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{\mathbf{f}}(u)]]$

Neutralität ($\overline{\mathbf{N}}$): $\forall x, y, w, z \in X$: $\forall u, u' \in U$: $[\forall i \in K$: $u_i(x) = u'_i(w) \wedge u_i(y) = u'_i(z)]$

$\Rightarrow [\langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u) \Leftrightarrow \langle w, z\rangle \in \mathbf{f}(u')]]$

Utilitaristisches Wohlfahrtsprinzip (UWP):

$\langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u) \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y)$

Maximin-Prinzip (MP):

$\langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u) \;\Leftrightarrow\; \min_i u_i(x) \geq \min_i u_i(y)$

Beispiele:

	i	j	Summe
x	1 (2)	99	100 (101)
y	50	50	100
Differenz	49 (48)	49	

UWP: $\langle x, y\rangle \in \tilde{\mathbf{f}}(u)$ $(\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u))$

Informationsbasis des UWP: $u_i(y) - u_i(x) = 49$, $u_j(x) - u_j(y) = 49$

$u_i(y) - u_i(x) = 48$, $u_j(x) - u_j(y) = 49$

MP: $\langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ $(\langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u))$

Informationsbasis des MP: $u_j(x) > u_j(y) = u_i(y) > u_i(x)$

	i	j	Summe
x	60	40	100
y	50 (49)	40 (41)	90
Differenz	10 (11)	0 (1)	

UWP: $\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ $(\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u))$

Informationsbasis des UWP: $u_i(x) - u_i(y) = 10$, $u_j(x) - u_j(y) = 0$

$(u_i(x) - u_i(y) = 11$, $u_j(y) - u_j(x) = 1)$

MP: $\langle y, x\rangle \in \tilde{\mathbf{f}}(u)$ $(\langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u))$

Informationsbasis d. MP: $u_i(x) > u_i(y) > u_j(y) \geq u_j(x)$

Nach $\overline{\mathbf{S}}\,\overline{\mathbf{P}}$: $\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$

Daher die lexikographische Erweiterung des MP (LMP): Ist die am schlechtesten gestellte Person indifferent, wird auf die nächste Person übergegangen.

Weiteres Beispiel:

	i	j	k	Summe
x	100	80	60	240
y	100	62	61	223
Differenz	0	18	1	

UWP: $\langle x, y \rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$

Informationsbasis des UWP: $u_i(x) - u_i(y) = 0$, $u_j(x) - u_j(y) = 18$, $u_k(y) - u_k(x) = 1$

LMP: $\langle y, x \rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$

Informationsbasis d. LMP: $u_i(x) = u_i(y) > u_j(x) > u_j(y) > u_k(y) > u_k(x)$

Charakterisierungstheorem des UWP:

Ein KWP **f** ist genau dann das UWP, wenn es *einheitenbezuogener kardinaler Vergleichbarkeit* gehorcht und die Bedingungen $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{P}}$ und $\overline{\mathbf{N}}$ erfüllt.

Problem der Neutralitätsbedingung (Welfarismus):

	i	j	Summe
x	10	4	14
y	8	7	15
Differenz	2	3	

1. Fall: x = Verteilung vor Steuer, y = Verteilung nach Steuer
2. Fall; x = Wohlfahrt vor Folter, y = Wohlfahrt nach Folter

Ist im 1. Fall: $\langle y, x \rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$, muß nach $\overline{\mathbf{N}}$ auch im 2. Fall: $\langle y, x \rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ sein, d.h. Folter kann gerechtfertigt werden.

Lösung des Welfarismus-Problems: Das regelutilitaristische Wohlfahrtsprinzip (RUWP)

Die Alternativen x, y sind nicht Sozialzustände im Sinne Arrows, sondern **handlungsleitende Regeln**.

Charakterisierungstheorem des LMP:

Ein KWP f ist genau dann das LMP, wenn es *ordinaler Vergleichbarkeit* gehorcht und die Bedingungen $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{P}}$ und $\overline{\mathbf{N}}$ sowie $\overline{\mathbf{E}}$ und $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{G}}$ erfüllt.

Bedingung $\overline{\mathbf{E}}$ steht für **Eliminierung indifferenter Personen**:

$\exists u^1, u^2 \in U$: $\exists M \subset K$: $[\forall i \in M: \forall x \in X: [u_i^1(x) = u_i^2(x)] \wedge \forall h \in K \backslash M: \forall x, y \in X:$ $[u_h^1(x) = u_h^1(y) \wedge u_h^2(x) = u_h^2(y)]] \Rightarrow [\mathbf{f}(u^1) = \mathbf{f}(u^2)]]]$

$\overline{\mathbf{E}}$ reduziert jeden Mehrpersonen-Konflikt auf einen 2-Personen-Konflikt:

Beispiel:

$u_i(x) > u_i(y) > u_j(y) > u_j(x) > u_k(y) > u_k(x)$

Diese Bewertungsstruktur wird von Bedingung $\overline{\mathbf{E}}$ als Indifferenz zwischen j und k interpretiert, da $u_j(y) > u_j(x)$ genau wie $u_k(y) > u_k(x)$. Daher wird Person j eliminiert und es stehen sich gegenüber: $u_i(x) > u_i(y) > u_k(y) > u_k(x)$, woraus sich aufgrund des LMP $\langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ ergeben muß.

Bedingung $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{G}}$ steht für **Minimale Gerechtigkeit** und heißt, daß nicht stets die besser gestellte Person gewinnen soll:

Es wird ausgeschlossen, daß bei einer Bewertungsstruktur u = $u_i(x) > u_i(y) > u_j(y) > u_j(x)$ stets $\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ das Resultat sein kann.

Hintergrund: Die Bewertungsstruktur u erlaubt aufgrund der KWP **f** mit den angeführten Bedingungen nur die Folgerungen: $\langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$ oder $\langle x, y\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)$. Bedingung $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{G}}$ schließt die letztere Möglichkeit aus.

Gemeinsame Charakterisierung:

Ein KWP **f**, das *kardinaler Vergleichbarkeit* gehorcht und die Bedingungen $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{P}}$ und $\overline{\mathbf{N}}$ sowie $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{G}}$ erfüllt ist genau dann das LMP, wenn es außerdem der der lexikographischen Maximin-Gerechtigkeit **LMG** genügt, und genau dann das UWP wenn es außerdem der utilitaristischne Gerechtigkeit **UK** genügt.

Lexikographische Maximin-Gerechtigkeit (**LMG**):

$\forall u \in U$: $\forall x, y \in X$: $\forall i, j \in K$: $[\forall k \in K\backslash\{i, j\}$: $[u_k(x) = u_k(y)] \wedge [u_i(y) < u_i(x) \leq u_j(x) < u_j(y) \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbf{f}(u)$

Utilitarische Gerechtigkeit (**UG**):

$\forall u \in U$: $\forall x, y \in X$:, $\forall i, j \in K$: $[u_i(x) + u_j(x) < u_i(y) + u_j(y) \wedge \forall k \in K\backslash\{i, j\}$:
$u_k(x) = u_k(y) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \dot{\mathbf{f}}(u)\,]$

Wegen Bedingung $\overline{\mathbf{N}}$ unterliegt auch das LMP der Welfarismus-Problematik.

Lösung bei Rawls: Alternativen sind Verteilungen sozialer Grundgüter (*social primary goods*).

- Rechte und Freiheiten
- Einkommen und Vermögen
- Positionen und Ämter
- Soziale Grundlagen der Selbstachtung

Problem des Grundgüterindexes.

Fairness

Die Alternativen $x, y \in X$ sind Allokationen von Gütern, die persönlichen Alternativen x_i, y_i etc. sind die individuellen Güterbündel aus den Allokationen.

Eine Allokation x ist **pareto-effizient**, wenn es keine andere Allokation y gibt, so daß $\forall i \in K$: $\langle y_i, x_i \rangle \in R_i$ und $\exists j \in K$: $\langle y_i, x_i \rangle \in P_i$.

Eine Allokation ist **neidfrei**, wenn $\forall i, j \in K$: $\langle x_i, x_j \rangle \in R_i$. Ist für ein i: $\langle x_j, x_i \rangle \in P_i$, wollen wir sagen, daß i in der Allokation x j beneidet.

Ist eine Allokation pareto-effizient und neidfrei, dann ist es eine **faire** Allokation.

Eine Gleichverteilung von Gütern ist in der Regel neidfrei, aber wegen der Unterschiede in den individuellen Präferenzen nicht pareto-effizient.

Theorem:

Ist die Allokation x mit Preisen p ein Wettbewerbsgleichgewicht einer Tauschökonomie, so daß $\forall i, j \in K$: $p \cdot x_i = p \cdot x_j$, dann ist x eine faire Allokation.

Beweis per Widerspruch:

Angenommen x ist nicht fair. Dann muß es ein i geben so daß $\langle x_j, x_i \rangle \in P_i$.
Dann ist: $p \cdot x_i < p \cdot x_i$. Nach der Definition des Wettbewerbsgleichgewichts muß jedoch $p \cdot x_i = p \cdot x_j$ sein – ein Widerspruch. Daher ist x fair.

Produktion

Individuelle Güterbündel der Form $(x_i, 1\text{-}q_i)$ und Allokationen der Form (x, 1-q), wobei q bzw. q_i Arbeitszeit und 1-q bzw. $1\text{-}q_i$ Freizeit ist (Konsum-Freizeit-Bündel).

Eine Allokation ist fair, wenn $\forall i, j \in K$: $\langle (x_i, 1\text{-}q_i), (x_j, 1\text{-}q_j) \rangle \in R_i$. ist.

Solche Allokationen gibt es aber nicht, da die Fähigkeiten der Individuen unterschiedlich sind. Aufgrund dieser Unterschiede kann ein Individuum i in einer Zeiteinheit mehr und Besseres produzieren wie ein anderes.

Wir müssen stattdessen Konsum-Outputbündel vergleichen, d.h. Bündel der Form $(x_i, 1\text{-}a_iq_i)$. Dabei ist a_i die Fähigkeit einer Person, in einer Zeiteinheit mehr oder weniger Güter zu produzieren, und q_i die individuelle Arbeitszeit, so daß a_iq_i als die individuelle Arbeitsfähigkeit bezeichnet werden kann.

Das führt zu folgender Definition einer fairen* Allokation:

Eine Allokation ist fair*, wenn $\forall i, j \in K$: $\langle (x_i, 1\text{-}q_i), (x_j, 1\text{-}(a_j/a_i)q_j) \rangle \in R_i$.

Theorem A:

Erhält jedes Individuum eine Anfangsausstattung, das ihm ein genau gleiches Bündel von Gütern gibt wie allen anderen und eine Einheit an Freizeit, dann ist das daraus resultierende Wettbewerbsgleichgewicht eine faire* Allokation.

Das Konsum-Freizeitbündel kann jedoch auch so konstruiert sein, daß jeder das gleiche Güterbündel und einen gleichen Anteil an der Freizeit aller erhält.

Jede Allokation (x, 1-q) erhält den Preisvektor (p, r) zugeordnet, wobei p die Preise für die Güter und r die Löhne für die Arbeitsleistungen angeben.

Jedes Individuum i hat damit ein Einkommen $e_i = (p, r) \cdot (x_i, 1-q_i)$, wobei die individuelle Freizeit soviel wert ist wie der individuelle Lohn je Zeiteinheit ausmacht. Dann ist eine Allokation fair**, wenn $\forall i, j \in K: e_i = e_j$ ist.

Theorem B:

Erhält jedes Individuum eine Anfangsausstattung, das ihm ein gleiches Güterbündel gibt wie allen anderen sowie einen gleichen Anteil an der Freizeit aller, dann ist das daraus resultierende Wettbewerbsgleichgewicht eine faire** Allokation.

Der Unterschied zwischen den beiden Existenztheoremen A und B ist:

Bei Theorem A werden die Unterschiede in den individuellen Fähigkeiten *nicht* ausgeglichen: Jeder erhält nach dem Produkt seiner Arbeit.

Bei Theorem B hingegen werden diese Unterschiede ausgeglichen: Jeder erhält bei Gleichheit des Freizeitanteils genausoviel wie der andere, unabhängig davon wieviel er in der Arbeitszeit geleistet hat.

PD Dr. Lucian Kern
Hauptseminar
Logik kollektiver Entscheidungen

Geschwister-Scholl-Institut
Sommersemester 2000
4. Juli 2000

Das Liberale Paradox

Beispiel

Alternativen: a (A kandidiert), b (B kandidiert), c (keiner kandidiert)

A	B	
		Entscheidung über a und c im privaten Entscheidungs-
b	c	bereich von A und über b und c in dem von B
a	b	(Bedingung der Liberalität). Dann gilt:
c	a	$\langle a, c\rangle \in P$ und $\langle c, b\rangle \in P$ wg. Liberalität
		$\langle b, a\rangle \in P$ wg. Pareto
		Also: $\langle a, c\rangle \in P \wedge \langle c, b\rangle \in P \wedge \langle b, a\rangle \in P$

Bedingung **L** (**Liberalität**):

$\forall i \in K: \exists x, y \in X: [\forall g \in G: [(\langle x, y\rangle \in P_i \Rightarrow \langle x, y\rangle \in P) \wedge (\langle y, x\rangle \in P_i \Rightarrow \langle y, x\rangle \in P]]$

Bedingung **P** (**Pareto-Prinzip**):

$\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y\rangle \in P_i \Rightarrow \langle x, y\rangle \in P]$

Theorem

Es gibt keine KWF, die den Bedingungen **P** und **L** genügt.

Beispiel in der Merkmals-Notation:

$a = (a, \underline{b}) \quad b = (\underline{a}, b) \quad c = (\underline{a}, \underline{b})$

A	B
$(\underline{a}, b)$	$(\underline{a}, \underline{b})$
$(a, \underline{b})$	$(\underline{a}, b)$
$(\underline{a}, \underline{b})$	$(a, \underline{b})$

A wählt zwischen a und $\underline{a}$ $\rightarrow$ a, dann resultiert: $(a, b) \vee (a, \underline{b})$

Das Recht von A zwischen a und $\underline{a}$ zu entscheiden, heißt:
Wahl zwischen $[(a, b) \vee (a, \underline{b})]$ und $[(\underline{a}, b) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$

Daher:

A	B	A und B
$[(a, b) \vee (a, \underline{b})]$	$[(a, \underline{b}) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$	$[(\underline{a}, b) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$
$[(\underline{a}, b) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$	$[(a, b) \vee (\underline{a}, b)]$	$[(a, \underline{b}) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$

Zusammen: $[(a, b) \vee (a, \underline{b})]$
$[(\underline{a}, b) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$
$[(a, \underline{b}) \vee (\underline{a}, \underline{b})]$
$[(a, b) \vee (a, \underline{b})]$

Bedingung **U** im Widerspruch zu Bedingung **L**

A: Nonkonformist, der immer entgegengesetzt zu B entscheidet,

B: Konformist, der immer konform zu A entscheidet

A		B		Zusammen
(a, $\underline{b}$)	($\underline{a}$, b)	(a, b)	($\underline{a}$, $\underline{b}$)	(a, $\underline{b}$)
($\underline{a}$, $\underline{b}$)	(a, b)	(a, $\underline{b}$)	($\underline{a}$, b)	($\underline{a}$, $\underline{b}$)
				($\underline{a}$, b)
				(a, b)
				(a, $\underline{b}$)

Die Zahl der gemeinsamen Elemente muß kleiner sein als die Zahl der Paare von Alternativen, über die die Individuen ein Entscheidungsrecht erhalten. Erst dann ergibt sich eine **kohärente** Zuordnung von Entscheidungsrechten.

Bedingung **AE** (**Ausschluß der Erzwingung**):

Eine kollektive Präferenz ist **erzwungen**: $\Leftrightarrow$ $\forall i \in K$: $\forall g \in G$: $\exists x, y \in X$: $[\langle x, y\rangle \in f(g)]$. Die kollektive Präferenz darf nicht erzwungen sein.

Theorem:

Es gibt keine KWF, die den Bedingungen **L** und **AE** genügt.

Für Kollektive Wohlfahrtsfunktionen gilt: **AE** $\wedge$ **I** $\Rightarrow$ **N**

Zuordnung von Entscheidungsrechten

Jedes Individuum $i \in K$ erhält ein Entscheidungsrecht D_i zugeordnet, mit dem ein geschützter Entscheidungsbereich für i festgelegt wird, der mindestens ein Paar von Alternativen umfaßt – in beiden Richtungen: $(x, y) \in D_i \Leftrightarrow (y, x) \in D_i$. Wir sagen dann, daß D_i **symmetrisch** ist.

Q: Menge aller nicht-leeren Teilmengen von X x X
Q(n): n-faches Kartesisches Produkt von Q

Bedingung **SL** (**Sen-Liberalität**):

Es gibt eine Zuordnung von Entscheidungsrechten $D = \langle D_1, D_2, \ldots D_n \rangle \in Q(n)$,
die für jedes $i \in K$ mindestens ein nicht-diagonales Glied umfaßt. Dann ist:
$\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y \rangle \in D_i \cap P_i \Rightarrow \langle x, y \rangle \in P]$.

Theorem:

Es gibt keine Kollektive Wohlfahrtsfunktion, die zugleich die Bedingungen **P** und **SL** erfüllt.

Kohärente Entscheidungsrechte:

$D = \langle D_1, D_2, \ldots, D_n \rangle$ ist genau dann **kohärent**, wenn es $\forall g \in G$ eine Ordnung R gibt, die $\forall i \in K$ die individuellen Ordnungen R_i um die Zuordnung der Entscheidungsrechte erweitern, so daß $R = D_i \cap R_i$ (i = 1, 2, …, n).

Bedingung **KL** (**Kohärente Liberalität**)

Für jede **kohärente** Zuordnung von Entscheidungsrechten $D = \langle D_1, D_2, \ldots, D_n \rangle$, bei der alle D_i **symmetrisch** sind und die für jedes $i \in K$ mindestens ein nicht-diagonales Glied umfaßt, gilt: $\langle x, y \rangle \in D_i \cap P_i \Rightarrow \langle x, y \rangle \in P$.

Sei $g = \langle R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ eine Präferenzstruktur, dann ist R_i^* die transitive Teil-Relation von R_i, die das i-te Individuum für die kollektive Entscheidung geltend macht.

Bedingung **ESP** (**Eingeschränktes Striktes Pareto-Prinzip**)

$\forall g \in G: \forall x, y \in X: [\forall i \in K: \langle x, y \rangle \in R_i^* \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in P_i^* \Rightarrow \langle x, y \rangle \in P]$.

Definition:

Eine Person $j \in K$ ist genau dann **liberal**, wenn $R_j^* = R_j \cap R$ ist.

Eine Person ist liberal, wenn sie für die kollektive Entscheidung aufgrund der Bedingung **ESP** ausschließlich die Teile ihrer Präferenzen geltend macht, die mit den Präferenzen aller anderen Poersonen über deren geschützte Entscheidungsbereiche übereinstimmen.

Theorem (Sen-Suzumura):

Gibt es mindestens ein Individuum, das **liberal** ist, dann existiert eine Kollektive Wohlfahrtsfunktion, die die Bedingungen **KL** und **ESP** erfüllt.

Beispiel in der Merkmals-Notation:

A	B	
$(\underline{a}, b)$	$(\underline{a}, \underline{b})$	A: $\langle \underline{a}, a\rangle \in P_A$ und $\langle a, \underline{a}\rangle \in P_A$
$(a, \underline{b})$	$(\underline{a}, b)$	B: $\langle \underline{b}, b\rangle \in P_B$ und $\langle b, \underline{b})\rangle \in P_B$
$(\underline{a}, \underline{b})$	$(a, \underline{b})$	

Forderung Gaertner/Krüger:

Die Personen dürfen nicht entgegengesetzte Präferenzen über die persönlichen Merkmale ihrer Alternativen x_i, y_i etc. haben, also z.B. $\langle x_i, y_i\rangle \in P_i$ in einem Teil ihrer Präferenzen und $\langle y_i, x_i\rangle \in P_i$ in einem anderen Teil.

X_o: Menge aller nicht-persönlichen Merkmale

$X_i = \{x_i, y_i, \ldots\}$: Menge der persönlichen Merkmale (i = 1, 2, …, n)

X: Menge der Alternativen = Kartesisches Produkt $X_0 \times X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

$\forall i \in K$ und $\forall x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$:

$X_{)i(} = X_0 \times X_1 \times \ldots \times X_{i-1}, X_{i+1}, \times \ldots \times X_n$

$x_{)i(} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{)i(}$

$z \;= (z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \in X_{)i(}$

$(x_i, z) = (z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$

Entscheidungsrecht von $i \in K$: $D_i^* = \{(x, y) \in X \times X \mid x_{)i(} = y_{)i(}\}$

Damit unterscheidet sich x von y nur durch ein persönliches Merkmal von i.

Definition:

Ein Individuum $i \in K$ hat **stimmig selbstbezogene** Präferenzen in Bezug auf seinen geschützten Entscheidungsbereich D_i*: $\Leftrightarrow \forall\ (x_i, y_i) \in X_i \times X_i$:

$[\exists(z, z') \in X_{)i(} \times X_{)i(}: \langle(x_i, z), (y_i, z')\rangle \in P_i \Rightarrow \forall(z, z') \in X_{)i(} \times X_{)i(}: \langle(x_i, z), (y_i, z')\rangle \in R_i]$

Bedingung **GKL** (**Gaertner-Krüger-Liberalität**):

Für jedes Individuum $i \in K$ gibt es einen geschützten Entscheidungsbereich D_i*, so daß bei Vorliegen **stimmig selbstbezogener** Präferenzen über D_i* gilt:

$\langle x, y\rangle \in D_i^* \cap P_i \Rightarrow \langle x, y\rangle \in P$.

Theorem (Gaertner-Krüger):

Es gibt eine Kollektive Wohlfahrtsfunktion, die den Bedingungen **P** und **GKL** genügt.